

ӘЛ-ФАРАБИ АТЫНДАҒЫ ҚАЗАҚ ҰЛТТЫҚ УНИВЕРСИТЕТІ
Физика-техникалық факультет
Электроника және астрофизика кафедрасы

Алимгазина Н.Ш.

Аспан механикасы

пәні бойынша дәрістер жинағы

«Физика және астрономия» мамандығы бойынша білім алушы
студенттерге арналған

Алматы, 2025

8-дәріс. Кіші параметр әдісі

Дәрістің мақсаты. Білім алушыларға жанасатын элементтер әдісінің (кіші параметр әдісінің) мәнін түсіндіру; жанасатын элементтер үшін Лагранж және Ньютон теңдеулерін құрастыру және оларды қолдануды үйрету; сондай-ақ ғасырлық және периодтық ұйытқулардың аспан денелерінің қозғалысына әсерін талдауға дағдыландыру.

Жоспар

1. Жанасатын элементтер әдісі (кіші параметр әдісі)
2. Жанасатын элементтер үшін Лагранж және Ньютон теңдеулері
3. Ғасырлық және периодтық ұйытқулар

Ұйытқымалы және ұйытқысыз қозғалыстардың теңдеулері

$$\ddot{\vec{r}} + \mu \frac{\vec{r}}{r^3} = \vec{F} \quad (1)$$

$$\ddot{\vec{r}} + \mu \frac{\vec{r}}{r^3} = 0 \quad (2)$$

Егер $\vec{F} \ll \frac{\mu}{r^2}$ шарты орындалса, ұйытқысыз қозғалыс ретінде кеплер қозғалысын қарастырады. Ұйытқысыз қозғалыс теңдеуінің жалпы шешімі

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \cos \Omega \cos u - \sin \Omega \sin u \cos i \\ \sin \Omega \cos u + \cos \Omega \sin u \cos i \\ \sin u \sin i \end{pmatrix}, \quad (3)$$

осында

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \nu}, \quad u = \omega + \nu, \quad \int_0^\nu \frac{d\nu}{(1 + e \cos \nu)^2} = \frac{\sqrt{\mu}}{p^{3/2}} (t - \tau). \quad (4)$$

1. Жанасатын элементтер әдісі (кіші параметр әдісі)

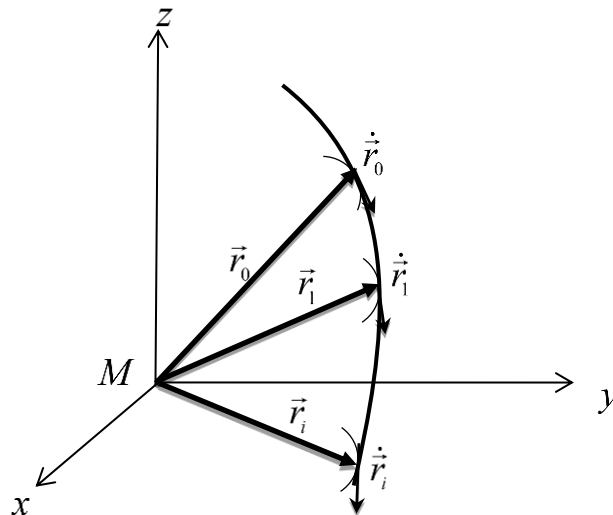
Егер бастапқы шарттар

$$\vec{r}_0 = \vec{r}(t_0) \text{ және } \dot{\vec{r}}_0 = \dot{\vec{r}}(t_0) \quad (5)$$

болса, ұйытқымалы мен ұйытқысыз қозғалыстардың орбиталары $\vec{r}_0$ нүкте арқылы өтеді және осы нүктеде олардың $\dot{\vec{r}}_0$ жанама қисығы бірдей болады. Сондықтан $t_0 - \Delta t < t < t_0 + \Delta t$ кіші уақыт интервалында ұйытқымалы орбита ұйытқысыз орбитадан айырмашылығы аз болады. Сандық ретінде белгілі Δt интервал кезінде орбитаның айырмашылығының аз болуы $F \ll \frac{\mu}{r^2}$

теңсіздіктің орындалу дәрежесіне тәуелді. $\vec{r}_1$ және $\dot{\vec{r}}_1$ бастапқы шарттар үшін осы қозғалыстардың теңдеулерінің шешімін анықтағанда, $t_1 = t_0 + 2\Delta t$ уақыт мезетінде де орбиталардың айырмашылығы аз болады. $t_0 < t < t_n$ уақыт аралығында ұйытқымалы қозғалысты - $t_k - \Delta t < t < t_k + \Delta t$ аралықтарындағы ұйытқысыз кеплер қозғалыстардың жиынтығы ретінде қарастырады. Жиынтықтағы әр қозғалыстың бастапқы шарттары мен орбита элементтерінің мәндері жеке болады (1 сурет).

Шеткі ауысу кезінде $\Delta t \rightarrow 0$, әр t уақыт үшін Кеплер қозғалысының $\vec{r}$ радиус-векторы мен $\dot{\vec{r}}$ жылдамдық векторыны ұйытқымалы қозғалыстың радиус-векторы мен жылдамдық векторына сәйкес келеді. Әр кеплер қозғалыстың орбита элементтері үздіксіз функция ретінде болады: $\Omega(t)$, $\omega(t)$, ... $\tau(t)$. Осы кезде кеплер орбиталарының шексіз жиынтығы қарастырылады және әр қайсысы белгілі нүктелерде ұйытқымалы қозғалысқа жақын болады (1 сурет).



1 сурет – Ұйытқымалы мен жанасатын орбиталар

Сонда ұйытқымалы орбитасы ұйытқысыз кеплер орбиталар жиынтығының айналатын қисығы ретінде болады. Ұйытқымалы қозғалыстың шешімін анықтау үшін – ұйытқысыз қозғалыстың орбита элементтерін вариация әдісі арқылы анықтауға болады. Осы әдіс, аспан механикасында, *жанасатын орбиталар* немесе *жанасатын элементтер* әдісі деп аталады.

Егер әр t уақыт мезетінде ұйытқысыз қозғалыстың $\vec{r}$ радиус-векторы мен $\dot{\vec{r}}$ жылдамдық векторыны қарастырылып отырған ұйытқымалы қозғалыстың радиус-векторы мен жылдамдық векторына сәйкес келсе, осы ұйытқысыз қозғалысты *жанасатын қозғалыс* деп атайды. Оның орбита элементтері - айнымалы шамалар болады және олар *жанасатын элементтер* деп аталады. Осы орбитаны - *жанасатын орбита* деп атайды.

Осы әдісте координаттар арқылы жазылған (1) теңдеуден жанасатын элементтер арқылы жазылған алты дифференциалдық теңдеулеріне ауысады:

$$\frac{dE_i}{dt} = \Phi_i(t, E_j(t)), \quad i, j = 1, 2, \dots, 6 \quad (6)$$

осында E_i, E_j - кеплер орбита элементтерінің бірі. Жанасатын орбита ретінде эллипстік, гиперболалық немесе басқа кез келген орбита болу мүмкін.

Планеталар және олардың серіктерінің қозғалыстарының қарастырғандықтан, жанасатын орбита ретінде - эллипстік орбита алынады.

Осы әдісті қолдану үшін жанасатын элементтерінің теңдеулерін айқын түрінде алу қажет. Сол үшін алғашқы интегралдарды қолданамыз.

Егер функция $\Psi(t, \vec{r}(t, E_i), \dot{\vec{r}}(t, E_i)) = C$ (2) ұйытқысыз қозғалыс теңдеуінің алғашқы интегралы болса, сонда $\Psi(t, \vec{r}(t, E_i(t)), \dot{\vec{r}}(t, E_i(t))) = C$ (1) ұйытқымалы қозғалыс теңдеуінің алғашқы интегралы болады.

Осы алғашқы интегралдардың уақыт бойынша бірінші туындылары

$$\begin{aligned} \frac{d\Psi}{dt} &= \frac{\partial\Psi}{\partial t} + \frac{\partial\Psi}{\partial x} \dot{x} + \dots + \frac{\partial\Psi}{\partial \dot{x}} \ddot{x} + \dots = 0, \\ \frac{d\Psi}{dt} &= \frac{\partial\Psi}{\partial t} + \frac{\partial\Psi}{\partial x} \dot{x} + \dots + \frac{\partial\Psi}{\partial \dot{x}} \ddot{x} + \dots + \sum_{i=1}^6 \frac{\partial\Psi}{\partial E_i} \frac{\partial E_i}{\partial t} = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Екі теңдеуде де координаталары мен жылдамдықтары тең, ал үдеулердің айырымы $\vec{F}$ ұйытқу жасайтын үдеуіне тең болады, сонда

$$\sum_{i=1}^6 \frac{\partial\Psi}{\partial E_i} \frac{\partial E_i}{\partial t} + \frac{\partial\Psi}{\partial \ddot{x}} F_x + \frac{\partial\Psi}{\partial \ddot{y}} F_y + \frac{\partial\Psi}{\partial \ddot{z}} F_z = 0. \quad (8)$$

(8) теңдеу – жанасатын элементтерінің уақыт бойынша туындыларына байланысты сызықты алгебралық теңдеу.

2. Жанасатын элементтер үшін Лагранж және Ньютон теңдеулері

Егер ұйытқу күші ретінде – ортаның кедергі күші (мысалы: жасанды серіктің қозғалысына әсер ететін планета атмосферасының кедергі күші) болса, Лагранж теңдеулерін қолдану мүмкіндігі болмайды. Сондықтан жалпы жағдайды қарастыру қажет: егер x, y, z кез келген координат жүйесінде $\vec{F}$ ұйытқу күші X, Y, Z компоненттері арқылы берілсін.

Осы кезде ұйытқу күшінің компоненттері арқылы алынған жанасатын элементтері үшін теңдеулер жүйесінің түрі - осы күш потенциалды немесе потенциалды емес қасиетінен тәуелсіз болады. Сонда, ұйытқу потенциалының

туындыларынан, ұйытқу күшінің компоненттеріне $\vec{F} = gradR$ шарты негізде ауысамыз

$$X = \frac{\partial R}{\partial x}, Y = \frac{\partial R}{\partial y}, Z = \frac{\partial R}{\partial z}. \quad (9)$$

Жанасатын орбитаның кез келген элементін E арқылы белгілейміз

$$\frac{\partial R}{\partial E} = \frac{\partial R}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial E} + \frac{\partial R}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial E} + \frac{\partial R}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial E} = X \frac{\partial x}{\partial E} + Y \frac{\partial y}{\partial E} + Z \frac{\partial z}{\partial E}. \quad (10)$$

$\vec{r}$ радиус-векторының модулі - p, e, τ және оның бағыттау косинустары α, β, γ - Ω, π, i элементтеріне тәуелді болады. Сондықтан, p, e, τ элементтері үшін

$$\frac{\partial x}{\partial E} = \alpha \frac{\partial r}{\partial E}, \frac{\partial y}{\partial E} = \beta \frac{\partial r}{\partial E}, \frac{\partial z}{\partial E} = \gamma \frac{\partial r}{\partial E} \quad (11)$$

және Ω, ω, i элементтері үшін

$$\frac{\partial x}{\partial E} = r \frac{\partial \alpha}{\partial E}, \frac{\partial y}{\partial E} = r \frac{\partial \beta}{\partial E}, \frac{\partial z}{\partial E} = r \frac{\partial \gamma}{\partial E} \quad (12)$$

туындылары болады.

α, β, γ шамалардың Ω, ω, i элементтері бойынша туындыларын анықтағанда

$$\left(\frac{\partial \alpha}{\partial \Omega}, \frac{\partial \beta}{\partial \Omega}, \frac{\partial \gamma}{\partial \Omega} \right) = (-\beta, \alpha, 0), \quad (13)$$

$$\left(\frac{\partial \alpha}{\partial \omega}, \frac{\partial \beta}{\partial \omega}, \frac{\partial \gamma}{\partial \omega} \right) = (\alpha', \beta', \gamma'), \quad (14)$$

осында α', β', γ' - $\vec{r}_{\perp}^0$ ортының компоненттері. $\vec{r}_{\perp}^0$ орты - жанасатын орбита жазықтығында бағытталған және $\vec{r}^0$ ортына перпендикуляр орналасқан.

$$\left(\frac{\partial \alpha}{\partial i}, \frac{\partial \beta}{\partial i}, \frac{\partial \gamma}{\partial i} \right) = (\alpha'', \beta'', \gamma''), \quad (15)$$

осында $(\alpha'', \beta'', \gamma'') = \vec{R} = \vec{c}/c$ - жанасатын орбита жазықтығына перпендикуляр орты.

Егер $\vec{r}^0, \vec{r}_\perp^0, \vec{R}$ орттар арқылы анықталатын S, T, W координат жүйесін енгізгенде, матрица

$$\begin{vmatrix} \alpha & \alpha' & \alpha'' \\ \beta & \beta' & \beta'' \\ \gamma & \gamma' & \gamma'' \end{vmatrix}$$

x, y, z жүйеге байланысты S, T, W координат жүйесінің бағыттау косинустарының матрицасы болады. Сонда

$$\begin{vmatrix} S \\ T \\ W \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{vmatrix} \cdot X + \begin{vmatrix} \alpha' \\ \beta' \\ \gamma' \end{vmatrix} \cdot Y + \begin{vmatrix} \alpha'' \\ \beta'' \\ \gamma'' \end{vmatrix} \cdot Z \quad (16)$$

Енді (20)-ші теңдеуді (23)-(25) теңдеулерімен байланыстырғанда, Ω, ω, i элементтері бойынша R ұйытқу потенциалының туындылары

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial \omega} &= rT, & \frac{\partial R}{\partial i} &= r \sin u \cdot W, \\ \frac{\partial R}{\partial \Omega} &= r(-\beta X + \alpha Y) = r(\cos i \cdot T - \cos u \sin i \cdot W) \end{aligned} \quad (17)$$

Ω, π, i жанасатын элементтері үшін теңдеулерін аламыз. p, e, τ элементтері бойынша r қашықтықтың туындыларын анықтаған кезінде r қашықтықтың p, e тәуелділігімен бірге, $\nu(p, e, \tau)$ шын аномалияның тәуелділігін ескеру қажет.

Кез келген ұйытқу күші кезіндегі жанасатын элементтерінің дифференциалдық теңдеулері

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{r \sin u}{p \sin i} \tilde{W}, \quad \frac{di}{dt} = \frac{r}{p} \cos u \tilde{W}, \quad \frac{dp}{dt} = 2r\tilde{T}, \quad (18a)$$

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{\cos \nu}{e} \tilde{S} + \frac{\sin \nu}{e} \left(1 + \frac{r}{p}\right) \tilde{T} - \frac{r}{p} \sin u \cot i \tilde{W}, \quad (18a)$$

$$\frac{de}{dt} = \sin \nu \tilde{S} + \left[\cos \nu + (\cos \nu + e) \frac{r}{p} \right] \tilde{T}, \quad (18b)$$

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{r^2}{e\sqrt{\mu p}} \left[(eN \sin \nu - \cos \nu) \tilde{S} + \frac{p}{r} N \tilde{T} \right], \quad (18b)$$

осында

$$\tilde{S} = \sqrt{\frac{p}{\mu}} S, \quad \tilde{T} = \sqrt{\frac{p}{\mu}} T, \quad \tilde{W} = \sqrt{\frac{p}{\mu}} W, \quad N = \int_0^{\nu} \frac{\cos \nu}{(1 + \cos \nu)^3} d\nu.$$

(18) теңдеулер – *жанасатын элементтері үшін Ньютон теңдеулері*.

Коэффициенттер r, ν орбиталдық координаттары арқылы уақытқа тәуелді болады. r қашықтық орбита теңдеуі көмегімен ν шамасы арқылы жазылады, сондықтан осы коэффициенттер ν шын аномалияның функциялары болады. Сонда жанасатын элементтер теңдеулерінде t тәуелсіз айнымалы шамасынан ν тәуелсіз айнымалы шамасына ауысамыз. Сол үшін толық туындысын анықтау қажет

$$\frac{d\nu}{dt} = \frac{r^2}{\sqrt{\mu p}} + \frac{\cos \nu}{e} \tilde{S} - \frac{\sin \nu}{e} \left(1 + \frac{r}{p}\right) \tilde{T}. \quad (19)$$

Ньютон теңдеулерінен басқа элемент теңдеулеріне ауысуға болады, мысалы, эллипстік элемент теңдеулеріне. Жанасатын элементтерінің барлық дифференциалдық теңдеулерінің түрі арнайы анықтамалықтарында жазылады. Мысалы, үлкен жарты осіне осы теңдеудің түрі

$$\frac{da}{dt} = \frac{2ae \sin \nu}{1 - e^2} \tilde{S} + \frac{2a^2}{r} \tilde{T}. \quad (20)$$

Осында екі дене есебіндегі Якоби элементтерінің Кеплер элементтерімен байланысын қолданамыз

$$\Omega = \beta_3, \quad \omega = \beta_2, \quad \cos i = \frac{\alpha_3}{\alpha_2}, \quad p = \frac{\alpha_2^2}{\mu}, \quad e = \sqrt{1 + \frac{2\alpha_1\alpha_2^2}{\mu^2}}, \quad \tau = -\beta_1;$$

$$\alpha_1 = \frac{\mu}{2p}(e^2 - 1), \quad \alpha_2 = \sqrt{\mu p}, \quad \alpha_3 = \sqrt{\mu p} \cos i, \quad \beta_1 = -\tau, \quad \beta_2 = \omega, \quad \beta_3 = \Omega.$$

Якоби элементтері ұйытқымалы қозғалыста Гамильтон функциясына тең болады: $H = H_0 - R$, осында H_0 - ұйытқысыз қозғалыстың Гамильтон функциясы, $U_1 = -R$ - ұйытқудың потенциалдық энергиясы. α_i, β_i элементтері ұйытқымалы қозғалыста каноникалық түйіндес айнымалы шамалар, сондықтан олар *каноникалық элементтер* деп аталады. Егер Якоби элементтеріне кез келген каноникалық түрлендіруді қолдансақ, жаңа каноникалық элементтер жүйесін аламыз. Аспан механикасында Делоне каноникалық элементтері, Пуанкаренің бірінші және екінші каноникалық элементтерінің жүйесі қолданылады.

α_i, β_i каноникалық айнымалы шамаларға сәйкес келетін Гамильтон теңдеулері

$$\frac{d\alpha_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \beta_i}, \quad \frac{d\beta_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \alpha_i}.$$

Ұйытқысыз қозғалыстың гамильтон функциясы H_0 - α_i, β_i элементтерінің тұрақты шамаларын береді, сондықтан

$$\frac{d\alpha_i}{dt} = \frac{\partial R}{\partial \beta_i}, \quad \frac{d\beta_i}{dt} = -\frac{\partial R}{\partial \alpha_i}.$$

Осы теңдеудегі жанасатын Якоби элементтерінен жанасатын Кеплер элементтеріне ауысу қажет. Сонда

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{d\beta_3}{dt}, \quad \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\beta_2}{dt}, \quad \frac{d\tau}{dt} = -\frac{d\beta_1}{dt}, \quad \frac{dp}{dt} = 2\sqrt{\frac{p}{\mu}} \frac{d\alpha_2}{dt}, \quad (21a)$$

$$\sin i \frac{di}{dt} = -\frac{1}{\sqrt{\mu p}} \frac{d\alpha_3}{dt} + \frac{\cos i}{\sqrt{\mu p}} \frac{d\alpha_2}{dt}, \quad \frac{de}{dt} = \frac{p}{\mu e} \frac{d\alpha_1}{dt} + \frac{e^2 - 1}{e\sqrt{\mu p}} \frac{d\alpha_2}{dt}. \quad (21\text{ә})$$

Ұйытқу потенциалынан Якоби элементтері бойынша туындыларын анықтағанда

$$\frac{\partial R}{\partial \beta_1} = -\frac{\partial R}{\partial \tau}, \quad \frac{\partial R}{\partial \beta_2} = \frac{\partial R}{\partial \omega}, \quad \frac{\partial R}{\partial \beta_3} = \frac{\partial R}{\partial \Omega}, \quad (22a)$$

$$\frac{\partial R}{\partial \alpha_1} = -\frac{\mu(e^2 - 1)}{2p^2} \frac{\partial R}{\partial p} + \frac{\mu e}{p} \frac{\partial R}{\partial e}, \quad (22\text{ә})$$

$$\frac{\partial R}{\partial \alpha_2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu}{p}} \frac{\partial R}{\partial p}, \quad \frac{\partial R}{\partial \alpha_3} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu}{p}} \cos i \frac{\partial R}{\partial p} - \sqrt{\mu p} \sin i \frac{\partial R}{\partial i}. \quad (22б)$$

Сонда жанасатын кеплер элементтері үшін дифференциалдық теңдеулер - *Лагранж теңдеулері* анықталады

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{1}{\sqrt{\mu p} \sin i} \frac{\partial R}{\partial i}, \quad \frac{dp}{dt} = 2\sqrt{\frac{p}{\mu}} \frac{\partial R}{\partial \omega}, \quad \frac{d\tau}{dt} = \frac{p}{\mu e} \frac{\partial R}{\partial e}, \quad (23a)$$

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{\cos i}{\sqrt{\mu p} \sin i} \frac{\partial R}{\partial i} - 2\sqrt{\frac{p}{\mu}} \frac{\partial R}{\partial p} + \frac{1 - e^2}{e\sqrt{\mu p}} \frac{\partial R}{\partial e}, \quad (23\text{ә})$$

$$\frac{di}{dt} = -\frac{1}{\sqrt{\mu p} \sin i} \frac{\partial R}{\partial \Omega} + \frac{\cos i}{\sqrt{\mu p} \sin i} \frac{\partial R}{\partial \omega}, \quad \frac{de}{dt} = -\frac{1-e^2}{e\sqrt{\mu p}} \frac{\partial R}{\partial \omega} - \frac{p}{\mu e} \frac{\partial R}{\partial \tau}. \quad (236)$$

Бұл теңдеулерді кез-келген жанасатын қозғалыс үшін қолдануға болады. Алғашқы дәуір үшін орташа бойлығы мен перицентр бойлығы

$$\varepsilon = \pi + M_0, \quad \pi = \Omega + \omega$$

және

$$M_0 = n(t_0 - \tau), \quad n = \frac{\sqrt{\mu}}{a^{3/2}}, \quad p = a(1 - e^2)$$

теңдеулерін қолданып, эллипстік элементтер үшін теңдеулерді алуға болады. Сонда эллипстік жанасатын элементтер үшін Лагранж теңдеулері

$$\frac{da}{dt} = \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial \varepsilon}, \quad \frac{d\Omega}{dt} = \frac{1}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \frac{\partial R}{\partial i},$$

$$\frac{de}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial \pi} - \frac{1}{na^2} \frac{e\sqrt{1-e^2}}{1+\sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial \varepsilon},$$

$$\frac{d\pi}{dt} = \frac{\tan i/2}{na^2 \sqrt{1-e^2}} + \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial e},$$

$$\frac{di}{dt} = -\frac{1}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \frac{\partial R}{\partial \Omega} - \frac{\tan i/2}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \left(\frac{\partial R}{\partial \pi} + \frac{\partial R}{\partial \varepsilon} \right),$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial a} + \frac{\tan i/2}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial i} + \frac{1}{na^2} \frac{e\sqrt{1-e^2}}{1+\sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial e}.$$

Лагранж теңдеулеріндегі оң жағында тұрған бөліктерінің структурасына көңіл бөлейік. Оң жақтағы бөліктері - жанасатын элементтері бойынша ұйытқу потенциалының дербес туындыларының сызықты функциялары болады. Осы жерде E_2 элементінің теңдеуінде E_1 элементі бойынша туындының коэффициенті – тек таңбасымен E_1 элементінің теңдеуіндегі E_2 элементі бойынша туындының коэффициентінен айырмашылығы болады.

Осы теңдеулер – квазиканоникалық қасиетке ие. Осы теңдеулерінде a, e, i элементтеріне Ω, π, ε элементтері бойынша R потенциалдың туындылары кіреді және керісінше байланыс болады. Осы теңдеулерінде осындай

квазиканоникалық топтар p, e, i және Ω, ω, τ элементтері бойынша қарастырылады.

Егер ұйытқу күші ретінде – тартылыс күші болса, онда Лагранж теңдеулері қолданылады.

3. Ғасырлық және периодтық ұйытқулар

Егер жанасатын элементтер арқылы жазылған теңдеулерді эллипстік қозғалыс барлық сипаттамаларын қатарларға жіктеу мүмкіндігін қолданылғанда, ұйытқымалы күш ньютонның орталық күшіне қарағанда аз мөлшері эффективті байқалады. Осы кезде орташа аномалия бойынша Фурье қатарлары қолданылады, өйткені орбитаның жанасатын эксцентриситеті басында белгісіз болады.

Жанасатын элементтері арқылы жазылған теңдеулердің Фурье қатарына жіктелуі келесі теңдеумен жазылады

$$\frac{dE}{dt} = A_0(E_j) + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k(E_j) \cos kM + B_k(E_j) \sin kM).$$

Егер теңдеулердің оң жақтағы бөліктері кіші болса, (19) қатарының коэффициенттері кіші болады. (19) теңдеудің бастапқы жуықтауын алу үшін E_{j0} элементтердің бастапқы мәндері кезінде A_k, B_k коэффициенттерін анықтау қажет. Сонда келесі теңдеуді аламыз

$$\frac{dE^{(1)}}{dt} = A_0^{(0)} + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k^{(0)} \cos kM + B_k^{(0)} \sin kM).$$

$M = n_0(t - t_0) + M_0$ ескерген жағдайда (20) теңдеуді интегралдау оңайға түседі, сонда E элементі үшін бастапқы жуықтау төменгі формуламен анықталады

$$E^{(1)} = E_0 + A_0^{(0)}(t - t_0) + \sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{A_k^{(0)}}{kn_0} \sin kM + \frac{B_k^{(0)}}{kn_0} \cos kM \right) \Bigg|_{t_0}^t.$$

Теңдеудің құрылымын қарастырғанда, E_0 - тұрақты құраушысы, $A_0^{(0)}(t - t_0)$ - уақытқа сызықты түрде тәуелді құраушысы және көптеген периодтық құраушылары бар екенін көреміз. $A_0^{(0)}$ коэффициентінің мәні модуль бойынша аз болғанымен, $A_0^{(0)}(t - t_0)$ көбейтіндісі уақыт бойынша шексіз жоғарылайды.

$\delta E^{(1)} = E^{(1)} - E_0$ айырмасы - E элементінің ұйытқысы, осы жағдайда бірінші дәрежедегі ұйытқы. Сызықты құраушының және периодтық құраушыларының қосындысының ұйытқуға әсері әр түрлі болады. Периодтық

құраушылар ұйытқымалы қозғалыстың ұйытқысыз қозғалыстан аз мөлшердегі сандық ауытқуларын сипаттайды. Сызықты құраушыларының әсерінен ұзақ уақыт ішіндегі орбита элементінің өзгеруі ұйытқымалы қозғалыстан үлкен өзгерісте енгізіледі. Мысалы, бастапқы шеңберлік орбита қатты созылған эллипске айналады, орбитаның еңкеюі өзгереді және тағы осыған сәйкес өзгерістер болады. *Бірінші дәрежедегі ұйытқудың сызықты құраушылары – ғасырлық ұйытқу, ал периодтық құраушылары – периодтық ұйытқу деп аталады.*

Егер (21) жуықтауды (19) теңдеуіне енгізгенде, екінші дәрежедегі ұйытқуларды алуға болады. Сол теңдеулерде екінші дәрежедегі ғасырлық ұйытқуы, периодтық ұйытқуы және *сызықты құраушылар мен тригонометриялық құраушылардың көбейтіндісінен – аралас ұйытқулар* пайда болады. Аралас ұйытқулар – периодтық ұйытқулар болады, олардың барлығының амплитудалары уақыт өсуімен жоғарылайды.

Екі планеталық есебіне көңіл бөлейік. m_1 планета қозғалысының m_2 планетамен өзара ұйытқуы және керісінше есебін қарастырамыз. Сонда ұйытқымалы күш және оның потенциалы екі планетаның координаттарына тәуелді функциялары болады, олар планеталардың M_1 және M_2 орташа аномалия бойынша периодтық функциялар ретінде қарастырылады. Сонда m_1 ұйытқымалы планетаның кез келген орбита элементінің бастапқы жуықтаудың теңдеуі

$$\frac{dE_1^{(1)}}{dt} = A_0^{(0)}(M_2) + \sum_{k_1=1}^{\infty} (A_{k_1}^{(0)}(M_2) \cos k_1 M_1 + B_{k_1}^{(0)}(M_2) \sin k_1 M_1).$$

осында $A_{k_1}^{(0)}$ коэффициенті орташа аномалия бойынша Фурье қатарына жіктеледі

$$A_{k_1}^{(0)} = A_{k_1,0}^{(0)} + \sum_{k_2}^{\infty} (A_{k_1,k_2}^{(0)} \cos k_2 M_2 + B_{k_1,k_2}^{(0)} \sin k_2 M_2).$$

Осыған ұқсас қатарды $B_{k_1}^{(0)}$ коэффициенттер үшін алуға болды. егер $A_{k_1}^{(0)}$, $B_{k_1}^{(0)}$ қатарларын сол теңдеуіне енгізгенде және қажетті түрлендіру арқылы Фурьенің екілік қатарын аламыз

$$\frac{dE_1^{(1)}}{dt} = A_{0,0}^{(0)} + \sum_{k_1,k_2=-\infty}^{\infty} (A_{k_1,k_2}^{(0)} \cos(k_1 M_1 + k_2 M_2) + B_{k_1,k_2}^{(0)} \sin(k_1 M_1 + k_2 M_2)). \quad (24)$$

(24) теңдеуін интегралдау арқылы E_1 элементінің бастапқы жуықтаудың теңдеуін аламыз

$$E_1^{(1)} = E_1^{(0)} + A_{0,0}^{(0)}(t - t_0) + \sum_{k_1, k_2 = -\infty}^{\infty} \left[-\frac{A_{k_1, k_2}^{(0)}}{k_1 n_1^{(0)} + k_2 n_2^{(0)}} \sin(k_1 M_1 + k_2 M_2) + \frac{B_{k_1, k_2}^{(0)}}{k_1 n_1^{(0)} + k_2 n_2^{(0)}} \cos(k_1 M_1 + k_2 M_2) \right] \Bigg|_{t_0}^t. \quad (25)$$

n_1, n_2 - орташа қозғалыстардың мәндері әр есепке байланысты анықталады және баяу болса да уақыт бойынша өзгереді. Егер $\frac{n_1}{n_2} \cong \frac{k_1}{k_2}$ болса, жүйе резонансты күйге жақын болады. Осы кезде m_2 планетаның ұйытқымалы күшінің жиілігі m_1 планета қозғалысының меншікті жиілігіне жақын болады. Бұл жағдай m_1 планетаның m_2 планетаға ұйытқымалы әрекетіне де қатысты болады. Осы кезде (25) қатарының гармоникалары мен ұйытқымалы периодтар жоғарылайды

$$T_{k_1, k_2} = \frac{2\pi}{|k_1 n_1^{(0)} + k_2 n_2^{(0)}|}. \quad (26)$$

Осындай резонансты ұйытқулар **ұзақпериодты ұйытқулар** деп аталады. Мысалы, $|k_1| = 2$ және $|k_2| = 5$ жиіліктеріндегі Юпитер мен Сатурн қозғалыстарындағы өзара ұйытқу - ұзақпериодты ұйытқу болады, себебі Юпитердің орбиталдық периоды 12 жылға, ал Сатурнның периоды – 30 жылға жақын. Осы ұйытқулардың периоды – 900 жыл.

Бақылау сұрақтары

1. Жанасатын элементтер әдісі дегеніміз не және ол қандай мақсатта қолданылады?
2. Кіші параметр әдісінің физикалық мағынасы неде?
3. Лагранж және Ньютон теңдеулері қандай принципке негізделеді және олар жанасатын элементтер үшін қалай жазылады?
4. Ғасырлық және периодтық ұйытқулардың айырмашылығы неде?
5. Ғасырлық ұйытқулар орбитаның қандай параметрлеріне әсер етеді?
6. Периодтық ұйытқулар қандай аспандық құбылыстарды сипаттайды?

Әдебиеттер

1. Алимгазинова Н.Ш. Аспан механикасы. Оқу құралы // Алматы: Қазақ университеті, 2016. – 146 б.
2. Александров Ю. В. Небесная механика: Учебник. – Х.: ХНУ А 46 имени В. Н. Каразина, 2006. – 256 с.
3. Лукьянов Л.Г., Ширмин Г.И. Лекции по небесной механике: Учеб. Пособ. Для вузов. – Алматы, Издат. ..., 2009. 227 с.
4. Алексеев В.М. Лекции по небесной механике. – Ижевск: Ижевская республиканская типография, 1999, 160 с.

5. Холшевников К.В., Титов В.Б. Задача двух тел (учебное пособие). СПб: Изд. СПбГУ, 2007.

6. Холшевников К.В., Никифоров И.И. Свойства гравитационного потенциала в примерах и задачах (учебное пособие). СПб: Изд. СПбГУ, 2008.